

第四讲

射电辐射接收机

射电辐射接收机是一种把天线汇集起来的电磁辐射变为可测量信号的探测器。与运用量子效应制成的光电导探测器不同，它是一种利用场效应制成的探测器。

从遥远天体来的射电辐射是一种相当微弱的电磁辐射信号。一个典型射电源的发射流量密度为 1Jy ，这意味着在射电望远镜的口面接收到的信号辐射流是 10^{-26} Wm^{-2} （瓦/米²）。一个具有发射功率为 1 瓦，高度为 1000 公里的人造天体的辐射流量密度约为 $3\times 10^{-17}\text{ Wm}^{-2}$ 。宇宙天体射电信号比人造天体的发射要弱 10 亿倍，应该说射电辐射接收机是极微弱信号接收系统。

射电辐射接收机接收信号的另一个特点是待测的射电辐射信号比不测的噪声信号要小得多。从本质上说，射电辐射是千千万万个随机运动电子加速发射射电信号的统计集合，它是一种白噪声（white noise），而不幸的是射电望远镜收到的那些不想要的信号都是与它类似的白噪声。设射电望远镜观测一个射电源得到的天线温度为 T_a ，而观测一个没有射电源的天空背景得到的噪声温度为 T_{sys} ，在 3.2.4 节中，它定义为系统噪声温度，包括下面 6 项贡献，

$$T_{\text{sys}} = T_{\text{rcvr}} + T_{\text{bg}} + T_{\text{atm}} + T_{\text{spill}} + T_{\text{loss}} + T_{\text{cal}} \quad (4.0.1)$$

即射电接收机噪声温度 T_{rcvr} 、天空背景噪声温度 T_{bg} （宇宙微波背景、银河系连续辐射背景等）、 T_{atm} （大气微波辐射）、从射电望远镜旁瓣进入的地面辐射温度 T_{spill} 、馈源输入波导引起的 T_{loss} 和校准源引起的注入噪声 T_{cal} 。一般情况下，射电接收机噪声温度占系统噪声温度 50% 或 70%。于是我们可以把方程（1）改写

$$T_{\text{sys}} = T_{\text{rcvr}} + T_{\text{sky}} \quad (4.0.2)$$

其中 T_{sky} 表示在系统温度中除接收机以外的噪声温度，我们称它为天空噪声温度，注意它包含天空背景噪声温度 T_{bg} 、地球大气辐射噪声温度 T_{atm} 等。表 1 给出美国扩展甚大阵（EVLA）接收机的参数。系统噪声温度在 30K 至 100K 之间。

按照射电源天线温度的定义，一个射电点源的流量密度 F_ν 和天线接收这个射电点源辐射而产生的天线温度有关系

$$\frac{1}{2} F_v A_{eff} \Delta\nu = k T_A \Delta\nu \quad (4.0.3)$$

其中 A_{eff} 为天线有效面积，上式左边的因子 1/2 是因为射电望远镜一架接收机只接收一个偏振而引入

表 4.1 美国 EVLA 各个波段系统噪声温度、天空噪声温度和接收机噪声温度值

频率 (GHz)	1.2-2	2-4	4-8	8-12	12-18	18-26.5	26.5-40	40-50
频带	L	S	C	X	Ku	K	Ka	Q
T_{sys}	26	26	26	30	37	59	53	74-116
T_{sky}	12	11	10	10	12	25	13	26-28
T_{rcvr}	14	15	16	20	25	34	40	48

From Dan Mertely

的。如果一架口径为 25 米，效率为 0.5 的天线，接收一个流量密度为 1Jy 的点源，引起的天线温度约为 0.1 K，即使用美国口径为 100 米的 GBT 观测流量密度为 1Jy 的点源，引起的天线亮温度也只有 1.4 K。相比较近 100 K 的系统噪声温度，源的信号比噪声小 2 到 3 个数量级。于是说，射电望远镜接收的信号不仅很微弱，而它又淹没在很高的噪声信号中，提取这些射电源的有用信号是一项很复杂的技术。

本章侧重介绍射电接收机的前端，后端只简单地介绍了总功率辐射计，其他后端，如频谱仪、脉冲星观测的消色散接收系统等放在后面的有关章节里讨论。

§4.1 射电接收机的基本结构

图 4.1.1 给出一架典型的总强度射电超外差 (super-heterodyne) 接收机的方框图。来自射电源的辐射大多是偏振辐射，为了获得射电源的偏振特性，现代射电望远镜上都安装能接收两个偏振信号的双偏振接收机。

接收机的最前端是馈源，在工程设计上，它属天线系统 (参看 § 3.3.5)。厘米波段和短厘米波射电望远镜的馈源大都为喇叭，由于它对接收机的噪声有很大的影响，在研制和安装接收机时，又都把它作为接收机的一部分来考虑。它的功能是把自由空间的辐射转换成同轴电缆电流或波导中的导波 (guided wave)。

图中灰色的部分称为接收机的低温杜瓦，一般包含耦合器（coupler）、极化器（polarizer）和低噪声放大器（Low-Noise Amplifier，简称为 LNA）。

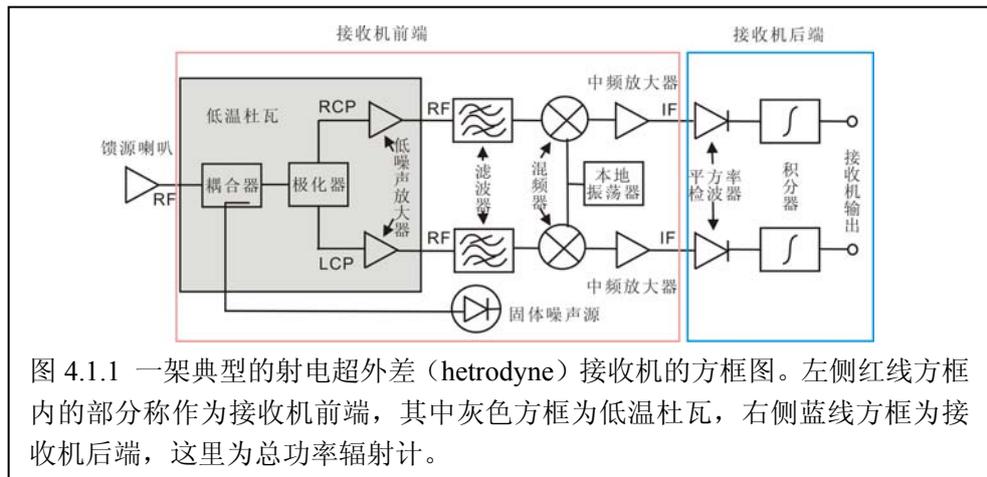


图 4.1.1 一架典型的射电超外差 (heterodyne) 接收机的方框图。左侧红线方框内的部分称作为接收机前端，其中灰色方框为低温杜瓦，右侧蓝线方框为接收机后端，这里为总功率辐射计。

由于它们的噪声水平对接收机总的噪声影响最大，为了降低噪声，它们都安装在一个低温杜瓦里。在厘米波和短厘米波段，一般低温杜瓦采用两级制冷。第一级是为了屏蔽热辐射，制冷的温度为 50 K，第二级提供给低噪声放大器，制冷温度为 15 K。

前端中的耦合器是为了在输入端引入一个校准噪声信号，以便在实际观测中做接收机的校准（在下一章会做详细地介绍）。极化器把来自耦合器的射电信号分成两个偏振信号，对于线偏振接收是两个互相垂直的线偏振信号，而对于圆偏振接收是相位差为 90°的左圆偏振（Left Circle polarization，简称 LCP）和右圆偏振（RCP）信号。在极化器和低噪声放大器连接的地方，把导波转换成可探测的电流或电压 $V_{in}(t)$ ，输入到低噪声放大器的电压约为微伏（ μV ）量级。

前端中的低噪声放大器是整架接收机中的核心部件，一是因为接收机总的噪声主要来自低噪声放大器，另外一点是它有足够大的放大倍数，使从极化器来的信号放大到接收机其余部分能对该信号进行有效处理，它的放大倍数约在 30db 到 40db 之间（几千倍），在低噪声放大器的输出端有毫伏（mV）量级的电压。

一般情况下，馈源和低噪声放大器的带宽都比较宽，为了截取我们需要的观测频段，在低噪声放大器的后面放置一个滤波器，它的功能是使我们需要的中心频率为 ν_0 ，带宽为 $\Delta\nu$ 内的信号无阻碍通过接收机，而最大限度地压制带宽外的信号。

尽管此时的接收机有我们想要带宽的信号，但它的中心频率很高，处理高频信号很困难，设备也很昂贵。为了使接收机下面几级比较容易地处理信号，如图所示，在滤波器后加混频器。他的功能是把来自滤波器的射电频率（简称射频，英文为 Radio Frequency，缩写为 RF）信号乘以本地振荡器的信号，产生一个容易处理的比射频低的信号，这个信号称中频（intermediate frequency）。

$$e^{i2\pi\nu t} \times e^{-i2\pi\nu_{LO}t} = e^{i2\pi(\nu-\nu_{LO})t} \quad (4.1.1)$$

当 $\nu_{LO} < \nu$ 时，称为上单边带接收，而当 $\nu_{LO} > \nu$ 称为下单边带接收，两个边带都接收称为双边带接收。

混频的好处是多方面的，首先用于中频接收系统的器件（如中频放大器等）制作相对比较容易，成本比要比射频器件低得多。另外，混频器的引入使整个接收机分成频率独立的射频接收和中频接收两大部分。由于射电接收机的增益都很大，有的达到 10^8 至 10^{10} (80-100db), 如果接收机的输出有很小一点点反馈到输入端，就会引起整个接收机的震荡，影响接收机的稳定度。由于射频和中频接收两大部分频率不同，大大减少这两部分之间的联系，提高接收机的稳定度。最后，不同射频的接收机选择不同的本地振荡器频率，可以得到相同的中频，这样不同射频段的接收机有相同的中频接收部分，这样会大大减低接收机的研制成本。

为了有足够大的信号，一般的射电接收机再接一个中频放大器。中频放大器是射电辐射超外差接收机中一个重要的部分，这是因为在毫米波和亚毫米波段，整个接收系统的增益是由中频放大获得的，增益的大约可达 60-90 db, 在厘米波段，放大倍数约在 25db 到 35db 之间，中频 IF 输出大约伏 (V) 的量级。它重要的另一个原因是接收机的带宽以及频谱响应，主要由中频放大器决定。

为了在观测中做射电辐射振幅校准，在接收机中都有一个固体噪声源 (Noise source)，它一般是噪声二极管，提供大约系统温度 5% 的温度，作为振幅校准噪声源。

为了降低接收机的噪声，接收机前端一般都放在射电望远镜的馈源箱里，对于主焦式的望远镜，它的主焦点上，对于卡焦式的望远镜，它在卡焦上。接收机前端以后是后端，后端一般放置在观测室内，它用一根低损耗的同轴电缆与前端连接。

接收机的后端是为特殊科学目标设计的接收设备，图 4.1.1 是目的为总功率接收的辐射计，它由两部分组成，前面一级是平方律检波器 (Square-Law detector), 后一级是积分器 (Integrator)。我们要测量是射电源的辐射功率，而不是电流或电压，只要把信号平方就能到达这个目的，这由平方律检波器来实现。平方律检波器的输出起伏变化很快，为了得到在某个时间范围内的平均值，我们采用积分器。这样也可以提高我们观测的信噪比。如果射电接收机工作在线性范围以内，则有

$$V_{out}(T) = A \frac{1}{\Delta t} \int_T^{T+\Delta t} V_{in}^2(t) dt + B \quad (4.1.2)$$

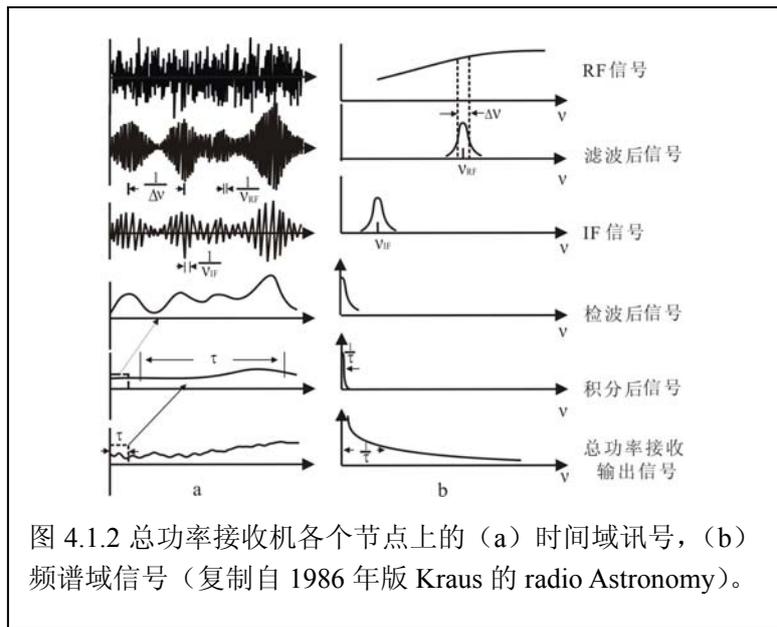
其中 A 为线性因子， B 为常数， Δt 为积分时间。如果射电望远镜天线与接收机匹配，则积分器的输出与入射辐射功率成正比，则有接收机一般表达式

$$r = p + qT_A \quad (4.1.3)$$

其中 r 为接收机输出读数， p 和 q 是常数，它们与接收机的性能有关。

各种射电天文观测要求不同的接收机，为了探测非常微弱的河外射电源，要求宽带，可长时间积分的接收机；为了分析脉冲星辐射的快速的周期变化，也要求宽带，但积分时间却要非常短（毫秒级）；对于太阳耀斑的观测，为了解在各个波段耀斑射电辐射强度的快速变化，则保持在一定的信噪比下，要求高频率分辨率和时间分辨率的接收机；而对于分子谱线观测应该有很高的谱分辨率；而对 VLBI 的相位观测，则要求接收机有很高的稳定度，则现代射电接收机的后端有如上述的总功率接收辐射计、频谱观测的频谱仪、脉冲星观测的消色散接收系统、甚长基线干涉观测的 VLBI 接收终端、等等。

为了对上述的总功率接收机各级的功能有进一步的认识，下面我们给出通过接收机的信号流。图 4.1.2 给出接收机各个节点上的时间域讯号和这些讯号的频谱特征。前面我们多次谈到，来自射电源的信号一般频率都很高，从频谱特征来看，是一种白噪声。如果它是连续辐射信号，它在很大的频谱范围有几乎相同强度，一般在射电天文里称为平谱。如果馈源喇叭、耦合器、



极化器和低噪声放大器的带宽很宽，则进入滤波器的信号基本保持射频的特征。经过滤波器以后，接收机只截取带宽 $\Delta\nu$ 的信号。按照 Fourier 频谱分析原理（参看习题 4.1），在时间域里，它截取了比特征时间 $1/\Delta\nu$ 缓慢变化的信号（包络）。经过混频以后，信号变为中频，频率大大降低。如在图中频率域图里，中心频率从 ν_{RF} 变为 ν_{IF} ，但在时间域里表征缓慢变化信号包络没有变化。经平方律检波后，它把负半周的信号折迭到正半周，其中的低通滤波器又滤掉了中频，于是在时间域里，信号只保留随时间缓慢变化的包络，在频率域里，它是一个低频信号。信号通过积分器后，信号在积分时间 τ 内进行平滑。平滑后的信号送入计算机记录和处理。

习题 4.1 如，设一射电信号，它在时间域里，有如下式的特征，试求出功率谱，并分析在时间和频率域里，这个信号的特征。

$$f(t) = \begin{cases} 1 & -T_0 \leq t \leq T_0 \\ 0 & |t| > T_0 \end{cases} \quad (\text{E4.1.1})$$

为了求出这段射电信号的功率谱，可以有两种方法，一是直接 Fourier 变换，平方后得到功率谱，另一种方法是求出它的自相关函数 $R(t)$ ，Fourier 变换后生成功率谱。

(1) 直接 Fourier 变换，我们有

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-T_0}^{T_0} e^{-i\omega t} dt = \frac{2 \sin \omega T_0}{\omega} \quad (\text{E4.1.2})$$

则它的功率谱为

$$P(\omega) = 4T_0^2 \left[\frac{\sin \omega T_0}{\omega T_0} \right]^2 \quad (\text{E4.1.2})$$

(2) 先求出自相关函数，再 Fourier 变换得到功率谱。按照自相关函数的定义

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t-\tau)dt \quad (\text{E4.1.3})$$

参看图 E4.1b，它是 $f(t-\tau)$ 的分布函数图，其中 τ 可以看作是一个延迟量， τ 可以取值 $[-2T_0, 2T_0]$ 。注意当 $f(t)$ 与 $f(t-\tau)$ 相乘时，可以得到自相关函数

$$R(\tau) = \int_{-T_0+\tau}^{T_0} 1dt = 2T_0 - \tau \quad 0 \leq \tau < 2T_0 \quad (\text{E4.1.4})$$

$$R(\tau) = \int_{-T_0}^{-T_0+\tau} 1dt = 2T_0 + \tau \quad -2T_0 < \tau < 0 \quad (\text{E4.1.5})$$

结合上面两式，并 Fourier 变换，有

$$\begin{aligned} p(\omega) &= \int_{-2T_0}^0 (2T_0 + \tau)e^{-i\omega\tau} d\tau + \int_0^{2T_0} (2T_0 - \tau)e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= 4T_0^2 \left[\frac{\sin T_0 \omega}{T_0 \omega} \right]^2 \end{aligned} \quad (\text{E4.1.6})$$

正弦的第一零点发生 $\pm \pi$ 的地方（参看喇叭天线方向图的公式 3.44 和图 3.13），则功率谱宽度为

$$BWFN = \frac{1}{T_0} \quad (\text{E4.1.7})$$

功率谱的半功率宽度为

$$HPBW = 0.4429 \frac{1}{T_0} \approx \frac{1}{2T_0} \quad (\text{E4.1.8})$$

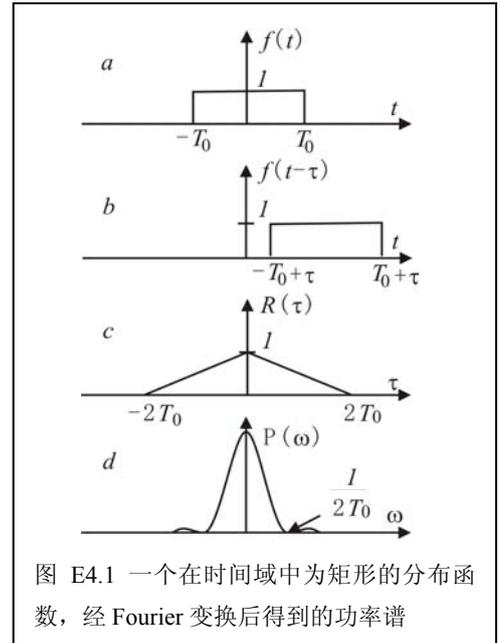


图 E4.1 一个在时间域中为矩形的分布函数，经 Fourier 变换后得到的功率谱

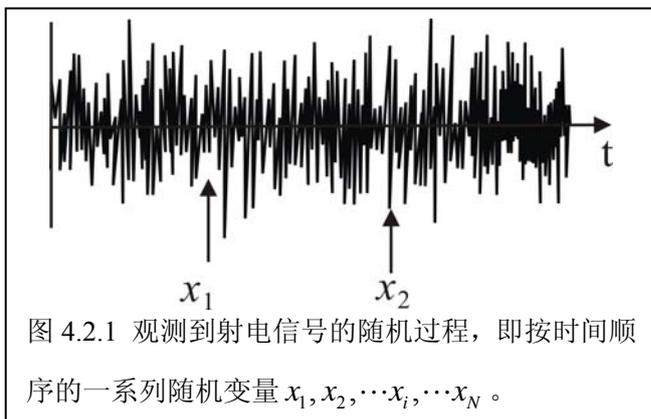
从上式和方程 E4.12 我们发现，不管是直接 Fourier 变换，还是通过自相关再 Fourier 变换，得到功率谱是一样的。如果在时间域里，信号是一个脉冲，则在频率域里是一个平谱；在频率域里，有带宽为 $\Delta\nu$ 的信号，在时间域里，变化的特征时间约为 $1/\Delta\nu$ 。

§4.2 射电信号的统计性质

在第一章介绍射电辐射特征时，我们简单地介绍了它的统计性质，本节将对这个性质作进一步的讨论。天体的射电辐射是粒子在外场的作用下加速引起的，在某个物理环境中，每个粒子的加速是一个随机量，如在自由-自由连续发射过程中，电子经过离子附近的速度是一个随机量，电子与离子的距离也是一个随机量，则电子在弹性碰撞过程中加速引起的发射自然也是随机变量。射电辐射是射电源里亿万粒子的辐射的集合，按概率统计学的中心极限定律（central limit theorem），这些粒子集合的辐射的特性服从高斯统计分布。在射电天文观测中，描述射电辐射这个随机变量可能是在天线口面的场强 E 或由电磁感应天线输出端的电压 v ，一般我们把它记做随机变量 x 。服从高斯统计分布的几率密度函数为

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad -\infty < x < \infty \quad (4.2.1)$$

其中 σ 和 μ 是两个参数。



我们在天线口面接收到的电场或天线输出端的电压是随时间变化的随机变量，如图 4.2.1 所示， x_1 是在 t_1 时刻接收到的电场或电压，而 t_2 时刻接收到的电场或电压是 x_2 ，它们都是随机变量。我们在一个时间段里，观测到的可能是按时间顺序的一系列随机变量 $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N$ ，叫做

随机过程。我们不可能对某个时间得到的随机电场或电压变量作统计分析，研究它们的特性，但我们可以研究随机过程 $X(t)$ 的统计性质，从随机过程 $X(t)$ 的研究获得某个时间随机变量 x_i 的统计规律，即从时间越的研究代替空间越的研究。

下面就以上两个话题作进一步地讨论。

§4.2.1 射电随机信号的一般特征

(1) 上面谈到来自天体的射电辐射统计上服从高斯分布, 分布的几率密度由(4.2.1)表示, 按照它的定义, x 落在 $x_0, x_0 + \Delta x$ 之间的几率为

$$p(x)\Delta x = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \Delta x \quad -\infty < x < \infty \quad (4.2.2)$$

按照几率密度的归一化条件, x 落在 $-\infty < x < \infty$ 之间全部的几率为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = 1 \quad (4.2.3)$$

x 的期望值, 即随机变量 x 的平均值为

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \quad y = \frac{x-\mu}{\sigma} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} (-\sigma^2) e^{-\frac{1}{2}y^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \\ &= \mu \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

电磁辐射理论和观测表明, 射电场强 E 或由电磁感应天线输出端的电压 v 的均值 $\mu = 0$ 。单色、线偏振的平面电磁波是最容易理解的例子, 场强 E 是一个矢量, 振幅有正有负, 均值为零。如是射电辐射是一个服从零平均高斯统计分布, 几率密度函数(4.2.1)式简化为

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} \quad (4.2.5)$$

随机变量 x 的 n 阶矩定义为

$$\begin{aligned} \langle x^n \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} dx \\ &= x^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} (-\sigma^2) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} (-\sigma^2) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} (n-1)x^{n-2} dx \\ &= (n-1)\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} x^{n-2} dx \\ &= \begin{cases} 0 & n = 2k - 1 \\ 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)\sigma^n & n = 2k \end{cases} \quad k = 1, 2, 3 \cdots \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

显然, 当 $k = 1, n = 1$ 时, 上式简化为(4.2.4)式。在这里我们特别强调随机变量 x 的 2 阶矩, 它的值为

$$\langle x^2 \rangle = \sigma^2 \quad (4.2.7)$$

它是随机变量 x 的平方, 也就是射电场强 E 或由电磁感应天线输出端的电压 v 的平方, 它表征射电

辐射场能流或天线输出功率，这正是我们希望要检测的量。于是，从射电信号统计学观点来看，图(4.1.1)接收机的前端处理的是随机变量 x ，即射电场强 E 或电压 v ，而后端辐射计处理的是随机变量 x 的二阶矩，或者说功率。

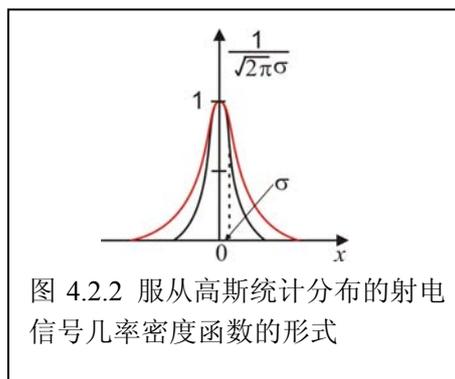
随机变量 x 的方差定义为随机变量相对于平均值的偏差的期望值，即

$$D(x) = \langle [x - \langle x \rangle]^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad (4.2.8)$$

考虑射电辐射服从零平均高斯统计分布以及二阶矩(4.2.7)，随机变量 x 的方差为

$$D(x) = \sigma^2 \quad (4.2.9)$$

则均方差(rms, root mean square)为 σ 。它描述随机变量 x 相对于它的均值的集中的程度。图 4.2.2 给出服从高斯统计分布的射电信号几率密度函数的形式。对这个钟形分布曲线，统计学里有详细的讨论，我们在这里不作重复，但我们要强调的是射电辐射是一个零平均的随机信号， σ 越小，分布越集中， σ 越大，分布越分散。



上面谈到，射电接收机最终的输出是射电场强 E 或由电磁感应天线输出端的电压 v 的平方，也就是说随机变量 x^2 。设

$$y = x^2 = \varphi(x) \quad (4.2.10)$$

y 是随机变量 x 的函数，它也是一个随机变量，我们来求函数 $\varphi(x)$ 的几率密度函数 $g(y)$ 。在统计学中给出方程，

$$g(y) = f[\psi(y)] |\psi'(y)| \quad (4.2.11)$$

其中 $\psi(y)$ 是 $\varphi(x)$ 的反函数， $\psi'(y)$ 是 $\psi(y)$ 对于 y 的导数。从方程(4.2.10)，我们有 $\psi(y) = \sqrt{y}$ ，

$\psi'(y) = (1/2)y^{-1/2}$ ，则有

$$g(y) = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} f(\sqrt{y}) = \frac{1}{2x} f(x) \quad (4.2.12)$$

从上式我们发现，表征功率的随即变量 $y = x^2$ 的几率密度函数不是 $f(x)$ 。它的均值和二阶矩分别为，

$$\langle y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} yg(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \sigma^2 \quad (4.2.13)$$

$$\langle y^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 g(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 f(x) dx = 3\sigma^4 \quad (4.2.13)$$

则随机变量 y 的方差为

$$D(y) = \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2 = 2\sigma^4 \quad (4.2.14)$$

则表征功率的随机变量 y 的均方差为 $\sqrt{D(y)} = \sqrt{2}\sigma^2$ ，这时的信噪比为，

$$SNR = \frac{\sqrt{2}\sigma^2}{\sigma^2} = \sqrt{2} \quad (4.2.14)$$

(2) 来自天体的射电辐射可能叠加另外射电辐射，如射电分子谱线观测中有来自分子云的分子线辐射，它可能叠加分子云中心 HII 区的连续辐射，更普遍的情况是射电源的辐射叠加来自天空背景的辐射和接收机本身的噪声。研究发现，这些辐射或噪声都与来自射电源的信号有相同的噪声特征，于是，研究它们之间的关系是非常重要的。我们首先来研究随机变量 x_1 和 x_2 ，它们同时进入射电接收机，则进入射电接收机的是二维的随机变量

$$z = x_1 + x_2 \quad (4.2.15)$$

设随机变量 x_1 和 x_2 本身的几率密度分布分别为 $p_1(x_1)$ 和 $p_2(x_2)$ ，在统计学中称它们为二维随机变量 z 的边缘分布函数。设二维随机变量 z 的几率密度为 $p_3(z)$ ，如果随机变量 x_1 和 x_2 相互独立，则有

$$p_z(x_1, x_2) = p_1(x_1)p_2(x_2) \quad (4.2.16)$$

设 $x_1 = x$ ，则有 $x_2 = z - x$ ， x 可以选 $(-\infty, \infty)$ 中的所有值，方程 (4.2.15) 都成立，如是有

$$p_3(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x)p_2(z-x)dx \quad (4.2.17)$$

上式即为统计学中的卷积定律。设随机变量 x_1 有平均值 m_1 ，均方根值 σ_1 ；随机变量 x_2 有平均值 m_2 ，

均方根值 σ_2 ，则 z 的均值为

$$\begin{aligned} \langle z \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} zp_3(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} zp_1(x)p_2(z-x)dx dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} zp_2(z-x)dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} (\mu+x)p_2(\mu)d\mu \quad \mu = z-x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (m_2+x)p_1(x)dx = m_2 + m_1 \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

z 的二阶矩为

$$\begin{aligned}
\langle z^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} z^2 p_3(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 p_1(x) p_2(z-x) dx dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} z^2 p_2(z-x) dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} (\mu+x)^2 p_2(\mu) d\mu \quad \mu = z-x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (m_2^2 + \sigma_2^2 + 2xm_2 + x^2) p_1(x) dx \\
&= m_2^2 + \sigma_2^2 + 2m_1m_2 + m_1^2 + \sigma_1^2 \\
&= \sigma_2^2 + \sigma_1^2 + (m_1 + m_2)^2
\end{aligned} \tag{4.2.19}$$

结合方程 (4.2.18) 和 (4.2.19), 随机变量变量 z 的方差

$$\sigma_z^2 = \langle z^2 \rangle - \langle z \rangle^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \tag{4.2.20}$$

从上面的结果我们发现, 两个独立随机变量和的方差等于它们各自方差的和。把上面的结果推广到一般的情况, 有 N 个独立随机变量 x_1, x_2, \dots, x_n , 有

$$z = \sum_{i=1}^N x_i \quad \langle z \rangle = \sum_{i=1}^N m_i \quad \sigma_z^2 = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 \tag{4.2.21}$$

随机变量的平均

设随机变量 x 有均值 m 和均方差 σ , 若 $z = \frac{x}{a}$, 则有

$$\begin{aligned}
\langle z \rangle &= \langle \frac{x}{a} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{a} p(x) dx = \frac{\langle x \rangle}{a} = \frac{m}{a} \\
\langle z^2 \rangle &= \langle \frac{x^2}{a^2} \rangle = \frac{1}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx = \frac{\langle x^2 \rangle}{a^2}
\end{aligned}$$

$$\sigma_z^2 = \langle z^2 \rangle - \langle z \rangle^2 = \frac{\sigma^2}{a^2} \tag{4.2.22}$$

于是, 假如

$$z = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad \langle z \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m_i \quad \sigma_z^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sigma_i^2$$

如果所有的随机变量有相同的 m 和 σ , 则

$$z = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad \langle z \rangle = m \quad \sigma_z^2 = \frac{\sigma^2}{N} \quad \sigma_z = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \tag{4.2.23}$$

从上面的结果我们发现, 如果做了 N 次测量, 测量的精度好了测量数的平方根倍, 这就是我们进行多次测量, 来提高观测精度的依据。

(3) 上面我们讨论了具有任意几率密度函数的多维随机变量联合几率密度问题, 下面我们来讨论零平均, 几率密度为高斯函数的联合几率密度的特征。假如 x_1 和 x_2 是具有高斯统计分布、均方差为 σ_1 和 σ_2

的两个独立随机变量,

$$p_1(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{\sigma}\right)^2} \quad -\infty < x < \infty$$

$$p_2(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2}{\sigma}\right)^2} \quad -\infty < x < \infty$$

$z = x_1 + x_2$, $p_z(x_1, x_2) = p_1(x_1)p_2(x_2)$, 则有

$$p_z(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\left(\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2} + \frac{x_2^2}{2\sigma_2^2}\right)} \quad (4.2.24)$$

假如 x_1 和 x_2 不是独立随机变量, 具有相关系数 ρ , 则

$$p_z(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2x_1x_2\rho}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{x_2^2}{\sigma_2^2}\right)} \quad (4.2.25)$$

如果 $\rho = 0$, 上式简化为方程(4.2.24), 表明 x_1 和 x_2 是相互独立随机变量。下面的这些结果大多在统计学中都列出过, 但为了方便应用, 我们还是把都收集起来,

$$\langle x_1 \rangle = \langle x_2 \rangle = 0$$

$$\langle x_1^2 \rangle = \sigma_1^2 \quad \langle x_2^2 \rangle = \sigma_2^2$$

这两个非独立随机变量的协方差和协方差二阶矩为

$$\langle x_1x_2 \rangle = \rho\sigma_1\sigma_2 \quad (4.2.26)$$

$$\langle x_1^2x_2^2 \rangle = \sigma_1^2\sigma_2^2 + 2\rho^2\sigma_1^2\sigma_2^2 \quad (4.2.27)$$

随机变量 x_1 对于 x_2 的条件几率密度函数为

$$\begin{aligned} p(x_1 | x_2) &= \frac{p_{12}(x_1, x_2)}{p_2(x_2)} = \frac{p_{12}(x_1, x_2)}{\int_{-\infty}^{\infty} p_{12}(x_1, x_2) dx_1} \\ &= \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} e^{-\frac{(x_1-x_2\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\rho)^2}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2}} \end{aligned} \quad (4.2.28)$$

x_2 发生的条件下, x_1 的期望值为

$\langle x_1 | x_2 \rangle = \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} x_2$ 。如果 $\rho = 1$, $\sigma_1 = \sigma_2$, 则有 $\langle x_1 | x_2 \rangle = x_2$ 。 x_1 的方差为

$$\sigma_{x_1|x_2}^2 = (1 - \rho)\sigma_1^2 \quad (4.2.29)$$

我们把上面的讨论扩展到 N 维高斯分布随机变量 x_1, x_2, \dots, x_n 的联合几率密度问题，从方程 (4.2.25)，我们有

$$p(X) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\rho|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2|\rho|} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \rho_{nm} x_n x_m} \quad (4.2.30)$$

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \dots & \rho_{1N} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & \dots & \rho_{2N} \\ \dots & & & & \\ \rho_{N1} & \rho_{N2} & \rho_{N3} & \dots & \rho_{NN} \end{bmatrix}$$

$$\rho_{nm} = \langle x_n x_m \rangle$$

$|\rho|$ 是 ρ 的模

§4.2.2 射电信号的随机过程特征

前面我们谈到，在天线口面接收到的电场或天线输出端的电压是随机过程，我们不可能对某个时间得到的随机电场或电压变量作统计分析，但我们可以研究随机过程 $X(t)$ 的统计性质。

经过深入的研究，发现射电辐射信号是平稳的随机过程，它的统计性质不随时间的变化而变化。在任何时间，射电信号都服从高斯统计分布，它是一种高斯随机过程。研究表明，这种服从高斯随机平稳过程的射电信号具有各态历经性，

$$E[X(t)] = \langle X(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{T_0 - \frac{T}{2}}^{T_0 + \frac{T}{2}} x(t) dt = \mu_x \quad (4.2.31)$$

表明某个时间段随机过程中的随机变量时间平均得到的均值与某个时间随机变量的均值是一样的。在随机过程中两两随机变量的相关服从如下的关系，

$$\langle X(t)X(t+\tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T - \tau} \int_{T_0 - \frac{T}{2}}^{T_0 + \frac{T}{2} - \tau} x(t)x(t+\tau) dt = R_x(\tau) \quad (4.2.32)$$

上式表明相关函数只与时间的延迟有关。平稳过程各态历经性是非常重要的，我们不要去做（实际上也做不到）某个时间的样本的统计性质，而只要研究一个足够长时段里样本的统计性质，来代替某个时间的样本统计性质。上面我们给出的统计性质都可以用到随机过程中来。

§4.3 射电接收机前端的噪声

在本章的开头我们谈到，射电望远镜接收的是极微弱的宇宙信号，要求望远镜的系统噪声温度越低越好，其中射电接收机的噪声大约占系统噪声的一半，接收机前端噪声又是整架接收机噪声的主要部分，于是接收机前端噪声的好坏对整架望远镜的工作性能起关键性的作用。本节首先回顾一些有关噪声的基本概念，然后比较详细地研究接收机各级对噪声的贡献，以及如何降低噪声的方法。

§4.3.1 噪声、噪声温度和噪声系数

当一个信号通过一个增益为 G 电子设备的时候，它的输出包括放大的信号和这个电子设备热噪声。与天线温度类似，用一个温度为 T_0 的负载电阻发射的噪声功率等效输入功率，则我们有

$$P_{in} = kT_0\Delta\nu \quad (4.3.1)$$

其中 k 为波尔兹曼常数， $\Delta\nu$ 为频宽。定义这个电子设备的增益为

$$G = \frac{P_{out}}{P_{in}} \quad (4.3.2)$$

如果这个电子设备没有噪声，则有

$$P_{out} = GkT_0\Delta\nu \quad (4.3.3)$$

由于电子设备内部的热噪声，即使没有外接负载，设备仍有输出噪声功率 P_N ，若我们用噪声温度 T_N 来等价这个噪声功率，

$$P_N = GkT_N\Delta\nu \quad (4.3.4)$$

当噪声温度 $T_N = 0$ 时，噪声功率为 0。

当负载电阻温度为室温时 ($T_0 = 290\text{K}$)，负载电阻发出的噪声功率通过一个实际有噪声的电子设备与通过一个无噪声的理想电子设备的比值定义为该电子设备的噪声系数 NF (Noise Figure)，则有

$$NF = \frac{GkT_0\Delta\nu + GkT_N\Delta\nu}{GkT_0\Delta\nu} = 1 + \frac{T_N}{T_0} \quad \text{或} \quad NF_{db} = 10 \log NF \quad (4.3.5)$$

其中 NF_{db} 是以 db 表示的噪声系数。上式表明一个无热噪声或者说无损耗的理想电子设备，它的噪声系数等于 1，实际电子设备的噪声系数都大于 1。

作为一个例子，我们来研究一根传输线的噪声系数和噪声温度。传输线的增益 $G < 1$ ，定义衰减因子 (loss factor) $L = 1/G > 1$ ，则当传输线输入端接一个温度为室温的负载时，这个传输线的输出

为 $P_{out} = kT_0\Delta\nu/L$ 。把传输线看成由无限个物理温度为 T_{phys} 的负载组成，并有衰减因子 L 的衰减器，则当它的输入端没有外接负载时，它的输出噪声功率（参看习题 4.2）为

$$P_N = (1 - \frac{1}{L})kT_{phys}\Delta\nu \quad (4.3.6)$$

按照噪声系数的定义（4.3.5），我们有

$$NF = \frac{P_{out} + P_N}{P_{out}} = 1 + \frac{(1-G)kT_{phys}\Delta\nu}{GkT_0\Delta\nu} = 1 + (L-1)\frac{T_{phys}}{T_0} \quad (4.3.7)$$

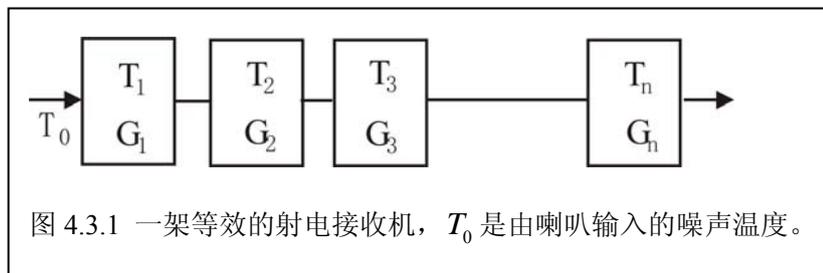
从上式并结合噪声系数的定义（4.2.5），这根传输线的噪声温度为

$$T_N = (L-1)T_{phys} \quad (4.3.8)$$

从上式我们发现，一根衰减因子为 2（增益 $G = 0.5$ ）的传输线，它将引入 $T_N = T_{phys}$ 的噪声。在图 4.1 接收机的强中，低噪声放大器前面的馈源喇叭、耦合器和极化器都可以看成是增益小于 1 的传输线或衰减器，它们对接收机整个噪声的影响是很可观的，下面的讨论我们会发现它对接收机其他极都有影响，为了减小引入的噪声，方法是把它们置于低温杜瓦之中，降低它们的物理温度。

§4.3.2 接收机前端噪声

一架如图 4.1.1 的接收机各级，可以等效成如图 4.3.1 具有内部不同噪声温度和放大因子的电子设备，其中输入的是望远镜对准射电源或对准天空



背景由馈源喇叭收集起来的功率，它的等效噪声温度为 T_0 。接收机最后的输出功率为

$$P_{out} = G_1G_2G_3 \cdots G_n kT_0\Delta\nu + G_1G_2G_3 \cdots G_n kT_1\Delta\nu + G_2G_3 \cdots G_n kT_2\Delta\nu + \cdots \quad (4.3.9)$$

考虑方程(4.3.4)，上述输出功率等效为望远镜的系统噪声温度，则有

$$P_{out} = G_1G_2G_3 \cdots G_n kT_{sys}\Delta\nu \quad (4.3.10)$$

考虑上面两式，我们有

$$T_{sys} = T_0 + T_1 + \frac{T_2}{G_1} + \frac{T_3}{G_1G_2} \cdots \frac{T_n}{G_1G_2 \cdots G_{n-1}} = T_{sky} + T_{rcvr} \quad (4.3.11)$$

$$T_{rcvr} = T_1 + \frac{T_2}{G_1} + \frac{T_3}{G_1 G_2} \cdots \frac{T_n}{G_1 G_2 \cdots G_{n-1}} \quad (4.3.12)$$

对于一架实际的接收机，馈源喇叭、耦合器和极化器可以结合在一起，看作是一根传输线或衰减器，考虑 4.3.8 式，上式可以改写为

$$T_{rcvr} = (L-1)T_{phys} + LT_2 + \frac{LT_3}{G_2} \cdots \frac{LT_n}{G_2 \cdots G_{n-1}} \quad (4.3.13)$$

其中 L 表示馈源喇叭、耦合器和极化器结合在一起的衰减因子， T_{phys} 表示它们所处的物理温度， $T_2, G_2, T_3, G_3 \cdots T_n, G_n$ 是接收机第一级至第 n 级电子设备的噪声温度和放大因子。从上式我们发现，馈源喇叭、耦合器和极化器的衰减因子最好等于 1，但实际是做不到的，为了降低这些部分的影响，要把它们置在杜瓦当中，降低它们的物理温度 T_{phys} 。由于射电接收机的第一级放大器的增益都很高，从上式第二项以后的各项都很小，射电接收机的噪声温度主要决定于第一级放大器噪声，一般都选用制冷的低噪声放大器 LNA。

低噪声放大器是很难研制很昂贵的器件，有的射电天文工程师把接收机的第一级改用混频器，它的增益因子小于 1，在考虑接收机噪声的时候可以把它与馈源喇叭、耦合器和极化器放在一起，看成是一个衰减因子。它的好处是直接把射频变成中频，中频放大器比较容易研制，它既降低了接收机第一级的噪声，也大大降低了它的制造的成本。

对于 $\nu < 100$ GHz 的射电天文观测，现在大都用第一级为低噪声放大器结构的接收机。但对于更高频率的射电天文观测，如在毫米波和亚毫米波频段，低噪声放大器的制造是相当困难的，这时第一级不得不用混频器。关于这部分内容我们将在下面的毫米波和亚毫米波接收机中来讨论。

习题 4.2 下面是一架实际射电接收机各级放大器所处的物理温度、增益、噪声系数和噪声温度（参看表 E4.2），试计算总的接收机噪声温度。

表 E4.2 一架实际接收机各级的参数

设备类型	物理温度 T_{phys} (K)	增益 (G) (db)	噪声系数 (NF) (db)	噪声温度 (T_N) (K)
馈源、极化器等	15	-0.7	0.7	2.6
LNA 放大器	15	33	0.2	15
RF 放大器	290	37	1.9	159

1 IF 放大器	290	24	5	627
2 IF 放大器	290	24	4.5	527
3 IF 放大器	290	19	4.5	527

接收机的第一级是馈源喇叭、耦合器和极化器组合在一起的电子设备，它可以等效为一个衰减器，它的增益 $G = 0.851$ ， $L = 1.175$ ， $NF = 1.175$ ，由方程 4.25，计算得到噪声温度 $T_N = 2.6 \text{ K}$ 。同样，我们可以算出低噪声放大器、射频放大器、第 1, 2, 3 级中频放大器的噪声温度，利用 4.2.13 式，我们可以得到接收机总的噪声温度

$$\begin{aligned}
 T_{rcvr} &= 2.6 + 1.175 \times 15 + \frac{1.175 \times 159}{1995} + \frac{1.175 \times 627}{1995 \times 5012} + \\
 &+ \frac{1.175 \times 527}{1995 \times 5012 \times 251} + \frac{1.175 \times 527}{1995 \times 5012 \times 251 \times 251} + \frac{1.175 \times 527}{1995 \times 5012 \times 251 \times 251 \times 79} \quad (\text{E4.3.1}) \\
 &= 2.6 + 17.6 + 0.09 \approx 20
 \end{aligned}$$

从上式我们发现接收机总的噪声主要的贡献来自第一级放大器，但如果第一级放大器前的馈源喇叭、耦合器和极化器不在低温杜瓦中，它们的噪声温度为 50 K，对整个接收机的影响是很大的。

§4.4 射电接收机最小可测天线温度

实际应用于射电辐射探测的接收机类型很多，不可能给出统一的特性指示，但有三个共同的，也是最重要的特性，即灵敏度、谱响应和时间响应，其中接收机的灵敏度决定的因素很多、很复杂、是我们最关心的问题。本节重点讨论这个问题。

我们把接收机简化成如图 4.4.1 的方框图，由接收机前端、平方率检波器和积分器三部分组成的一个等效电路图。射电辐射接收机的前端决定接收机的噪声温度、增益和频谱响应，它使信号放大 G

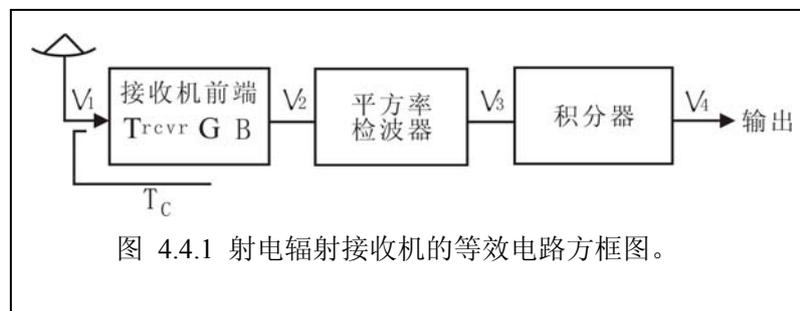


图 4.4.1 射电辐射接收机的等效电路方框图。

倍，使信号频率限制在带宽 B 以内，并引入噪声功率 T_{rcvr} 。平方率检波器实现射电信号辐射功率的测量，即 $V_3 = V_2^2$ ，积分器可以看成是一个具有时间常数 τ 的低通滤波器，实现 τ 时间的平均。如图所示，

输入电压 V_1 是来自天线的信号，经平方律检波器和低通滤波器后，输出电压为 V_4 。

射电接收机前端在无入射信号时，在它的输出端也有输出信号，设输出的平均噪声功率为

$$P_{rcvr} = GkT_{rcvr}B \quad (4.4.1)$$

若射电望远镜天线对向射电源， T_A 为射电源的天线温度， T_{sky} 为天空平均天线温度（注意它包括天空背景噪声温度 T_{bg} 、地球大气微波辐射温度 T_{atm} 、天线旁瓣进入的地面辐射温度 T_{spill} 、馈源输入波导损耗 T_{loss} 和校准源引起的注入噪声 T_{cal} ），接收机输出端的平均噪声功率为

$$P_{sys} = Gk(T_{rcvr} + T_{sky} + T_A)B \approx Gk(T_{rcvr} + T_{sky})B = GkT_{sys}B \quad (4.4.2)$$

由于一般的射电源天线温度比系统噪声温度要低得多，即 $T_{sys} \gg T_A$ ，上式的近似在大多情况下都是正确的。射电望远镜的系统噪声温度和射电源的天线温度都是随机变量，系统的平均噪声功率的大小 T_{sys} 并不直接限制接收机的最小可检测信号，限制它的是系统噪声温度 T_{sys} 起伏的大小，即均方根值 $\sigma_{T_{sys}}$ 。于是，我们定义射电辐射接收机的最小可检测信号等于接收机输出噪声功率的均方根值：

$$T_{A, \min} = \sigma_{T_{sys}} \quad (4.4.3)$$

下面我们来证明射电望远镜灵敏度最重要的关系式

$$\sigma_{T_{sys}} = \frac{T_{sys}}{\sqrt{B\tau}} \quad (4.4.4)$$

其中 B 是接收机的带宽， τ 是接收机的积分时间常数。

在 § 4.2 节中我们谈到射电望远镜接收到的信号是一种遵循零平均，并服从正态分布的随机信号，则在接收机的输入端有

$$\langle V_1 \rangle = 0 \quad (4.4.5)$$

$$\langle V_1^2 \rangle = \langle V_1^2 \rangle - \langle V_1 \rangle^2 = \sigma^2 = k(T_A + T_{sky})\Delta\nu \quad (4.4.6)$$

经过增益为 G 、带宽为 $B \ll \Delta\nu$ 和具有噪声温度 T_{rcvr} 的接收机前端以后，有

$$\langle V_2 \rangle = 0 \quad (4.4.7)$$

$$\langle V_2^2 \rangle = Gk(T_A + T_{sky} + T_{rcvr})B = kG(T_A + T_{sys})B \quad (4.4.8)$$

经过平方率检波器以后，有

$$\langle V_3 \rangle = \langle V_2^2 \rangle \quad (4.4.9)$$

按照 § 4.2 节讨论的具有高斯分布随机信号的 4 阶矩定律，我们有

$$\langle V_3^2 \rangle = \langle V_2^4 \rangle = 3\langle V_2^2 \rangle = 3[Gk(T_A + T_{sys})B]^2 \quad (4.4.10)$$

则平方率检波器后信号 V_3 噪声功率的均方根值为

$$\sigma_3^2 = \langle V_3^2 \rangle - \langle V_3 \rangle^2 = 2[Gk(T_A + T_{sys})]^2 \quad (4.4.11)$$

平方率检波器的输出信号 V_3 进入积分器以后，在时间间隔 τ 内平均，假如在这期间有 N 个独立的采样，则积分器的输出为

$$V_4 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V_3^i \quad (4.4.12)$$

按照尼奎斯采样定律 (Nyquist sampling theorem)，为了得到带宽 B 内信号完整的信息，要求采样间隔为 $1/2B$ ，则在积分时间间隔 τ 内有独立的采样数

$$N = 2\tau B \quad (4.4.13)$$

于是，最后输出信号平均功率和它的方差为

$$\langle V_4 \rangle = \langle V_3 \rangle = kG(T_A + T_{sys})B \quad (4.4.14)$$

$$\sigma_4^2 = \frac{\sigma_3^2}{N} = \frac{2[kG(T_A + T_{sys})B]^2}{2B\tau} \quad (4.4.15)$$

$$\sigma_4 = kGB \frac{T_A + T_{sys}}{\sqrt{B\tau}} \quad (4.4.16)$$

在方程 4.4.14 和 4.4.16 里的量纲是功率，如果都用温度表示（在实际测量中，可以用接收机校准的方法去掉常数 kGB ，有关接收机校准的内容将在下一章介绍），则有

$$\langle V_4 \rangle = T_A + T_{sys} \quad (4.4.17)$$

$$\sigma_4 = \frac{T_A + T_{sys}}{\sqrt{B\tau}} \approx \frac{T_{sys}}{\sqrt{B\tau}}$$

这就是我们要证明的方程 4.4.4 式。读者须注意的是，这里我们用均方根值 σ_4 来表示射电辐射接收机噪声起伏的大小，它只是一个概率统计量，只表明实际起伏的量极范围。实际上，还有不少大于均方根值 σ_4 的噪声，据分析遵循高斯分布的射电信号还有 30% 的采样点的噪声起伏绝对值大于 σ_4 ；另外。大于 $3.3\sigma_4$ 的采样点的几率很小，大于 $5\sigma_4$ 的几率约 6×10^{-6} 。因此，为了可靠起见，一般取最小可测天线温度等于上述均方根值的 3 倍或 5 倍，则方程 4.4.4 可改写为

$$T_{A,\min} = M \times \frac{T_{\text{sys}}}{\sqrt{B\tau}} \quad (4.4.18)$$

§4.5 增益起伏和 Dicke 接收机

在获得方程 (4.4.18) 最小可测天线温度的分析讨论中，我们没有考虑接收机各种参数，如增益 G 、带宽 B 、接收机本身噪声温度 T_{revr} 等的变化对灵敏度的影响。实际射电天文的观测中，由于环境温度的变化、电源的不稳定、元件的老化等等因素的影响，即使没有噪声本身特性引起的起伏，接收机的输出也是不稳定的，是一种缓慢变化的起伏。这种变化也影响接收机的灵敏度。

为讨论方便起见，我们把接收机各个参量的变化都等效为增益 G 的变化。假设增益是一个随机变量 g （它变化的特征时间从几秒到几小时），增益的平均值和均方根值为

$$\langle g \rangle = G, \quad \sigma_g = \Delta G \quad (4.5.1)$$

则接收机的输出信号的平均值和由于它的变化而引入的均方根值为

$$V_4 = kG(T_A + T_{\text{sys}})B \quad (4.5.2)$$

$$\sigma_G = k\Delta G(T_A + T_{\text{sys}})B \quad (4.5.3)$$

若上式用温度表示，有

$$\sigma_G = \frac{\Delta G}{G}(T_A + T_{\text{sys}}) \quad (4.5.4)$$

这个由接收机各个参量变化引起接收机输出信号的起伏，与接收机本身噪声一样，影响接收机的灵敏度。假定这两种噪声是不相干的话，则总的噪声起伏 σ_T 可表示为

$$\sigma_T = \left[\sigma_{T_{\text{sys}}}^2 + \sigma_G^2 \right]^{1/2} = (T_A + T_{\text{sys}}) \left[\frac{1}{B\tau} + \left(\frac{\Delta G}{G} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (4.5.5)$$

由此可以看出，当接收机增益的相对变化大于 $1/B\tau$ 时，我们不能不考虑这种因素对灵敏度的影响。假定 $B = 20 \text{ MHz}$ ， $\tau = 5 \text{ 秒}$ ，则要求增益相对变化 $\Delta G/G < 10^{-4}$ ，这在以前是很难做到的。因此，为了减少增益对射电接收机灵敏度的影响，发展了一种调制法接收机，这种调制法接收机是美国麻省理工学院的 R.H.Dicke 工程师发明的，因此也称 Dicke 接收机。

图 4.5.1 给出 Dicke 接收机的方框图，从图看来，它与图 4.4.1 所示的一般外差式接收机差不多，只是在输入端加一个 Dicke 开关，在平方率检波器后加了一个同步检波器和开关信号发生器。其中开

关信号发生器
产生一个频率
为 ν_m (几十至几
百赫兹) 的低频
控制信号, 它控
制接收机输入
端的 Dicke 开

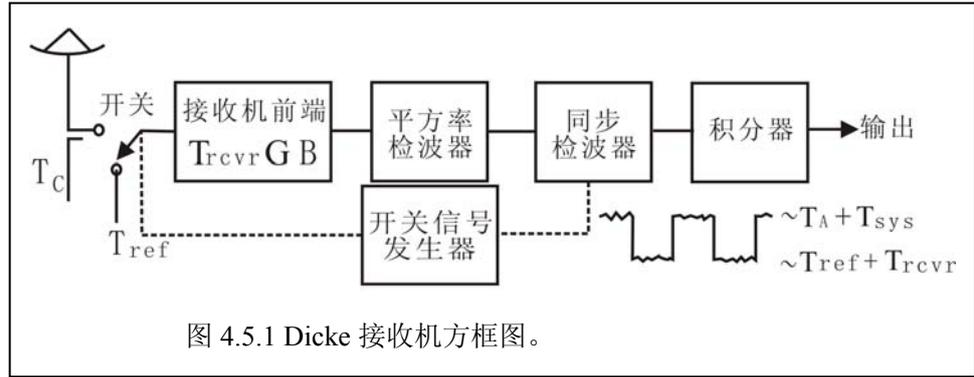


图 4.5.1 Dicke 接收机方框图。

关。在一个半周内, 开关接到对向射电源的天线, 在另一半周, 开关连接到温度为 T_{ref} 的参考源。经过平方律检波以后的输出, 是与输入信号功率成正比的矩形波信号。这个矩形波输入同步检波器, 同步检波器把矩形波变成一个直流信号, 最后经积分器平滑。

考虑平方律检波以后的输出信号, 若前半周用 V_{31} 表示, 而后半周 V_{32} 表示, 则它们的平均值和均方根值 (用温度示) 分别为

$$\langle V_{31} \rangle = m_1 = T_A + T_{sky} + T_{rcvr} = T_A + T_{sys} \quad (4.5.6)$$

$$\langle V_{32} \rangle = m_2 = T_{ref} + T_{rcvr} \quad (4.5.7)$$

$$\sigma_1^2 = (T_A + T_{sys})^2 / \left(B \frac{\tau}{2} \right) \quad (4.5.8)$$

$$\sigma_2^2 = (T_{ref} + T_{rcvr})^2 / \left(B \frac{\tau}{2} \right) \quad (4.5.9)$$

上面两式右边分母中的 1/2 是由于只占一半观测时间造成的。经过同步检波器以后, 信号输出和它的方差为

$$m = m_1 - m_2 = T_A + T_{sky} - T_{ref} \quad (4.5.10)$$

$$\sigma_T^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = \frac{2 \left[(T_A + T_{sys})^2 + (T_{ref} + T_{rcvr})^2 \right]}{B\tau} \quad (4.5.11)$$

我们假设有效温度 T_{eff}

$$T_{eff}^2 = \left[(T_A + T_{sys})^2 + (T_{ref} + T_{rcvr})^2 \right] / 2 \quad (4.5.12)$$

则输出信号的方差, 也就是说调制法接收机的灵敏度为

$$\sigma_T = \frac{2T_{eff}}{\sqrt{B\tau}} \quad (4.5.13)$$

当选取 $T_{ref} \sim T_A + T_{sky}$ 或 $T_{ref} \sim T_{sky}$ (由于 $T_A \ll T_{sky}$) 时, 接收机的输出 $m \approx 0$, 并有

$$T_{eff} \approx T_A + T_{sys} \quad (4.5.14)$$

公式 (4.5.13) 可以改写成为

$$\sigma_T \approx \frac{2(T_A + T_{sys})}{\sqrt{B\tau}} \quad (4.5.15)$$

调制法 Dicke 接收机的灵敏度比一般接收机的灵敏度低一倍。

当增益 G 变化到 $G + \Delta G$ 时, 公式 (5.5.10) 和 (5.5.11) 应改写为

$$m \approx \left(1 + \frac{\Delta G}{G}\right) (T_A + T_{sky} - T_{ref}) \quad (4.5.16)$$

$$\sigma_T^2 = \frac{4T_{eff}^2}{B\tau} + (T_A + T_{sky} - T_{ref})^2 \left(\frac{\Delta G}{G}\right)^2 \quad (4.5.17)$$

调制法 Dicke 接收机在增益发生变化的情况下, 它的灵敏度为

$$\sigma_T = T_{eff} \left[\frac{4}{B\tau} + \frac{(T_A + T_{sky} - T_{ref})^2}{T_{eff}^2} \left(\frac{\Delta G}{G}\right)^2 \right]^{1/2} \quad (4.5.17)$$

当选取 $T_{ref} \sim T_A + T_{sky}$ 或 $T_{ref} \sim T_{sky}$, 则有

$$\sigma_T = \frac{2(T_A + T_{sys})}{\sqrt{B\tau}} \quad (4.5.18)$$

从上面的讨论可以看出, 调制型 Dicke 接收机虽然克服了一般接收机增益起伏的影响, 但付出的代价是灵敏度降低一倍。这是因为在调制型接收机里, 接收机只在一半时间里接收来自天线的信号。而接收机不因为调制法接收, 而降低接收机本身噪声对灵敏度的制压作用。研究表明各种射电接收机有不同的灵敏度, 我们用 Q 来表示, Q 一般在 1 到 2 之间, 则接收机最小可测天线温度为

$$T_{A,\min} = MQ \frac{T_{sys}}{\sqrt{B\tau}} \quad (4.5.19)$$

其中因子 Q 约在 1 到 2 之间。

$$F_{A,\min} = MQ \frac{2kT_{sys}}{\eta_A A_g \sqrt{B\tau}} \quad (4.5.20)$$

如果再考虑接收机的传输效率 η_t ,

§4.6 射电望远镜灵敏度

实际射电天文观测中，我们关心的不仅是一架接收机的最小可测天线温度，而是整个射电望远镜系统的最小可探测亮温度 $T_{B,\min}$ 和流量密度 F_{\min} 。

回忆我们在讨论望远镜天线对天体成图观测的影响（参看 § 3.4.1.1），当天线对向射电点源时，天线接收到的功率为（参看方程 3.65）

$$P = \frac{1}{2} A_{\text{eff},0} F \Delta \nu$$

结合天线温度的定义（参看方程 3.12 和 3.34 式），我们有

$$\frac{T_A}{F_s} = \frac{\eta_A A_g}{2k}$$

上式定义了 DPFU（Degree Per Flux Unit），即观测单位流量的射电源得到的天线温度，它的倒数为

$$\frac{F_s}{T_A} = \frac{2k}{\eta_A A_g} \quad (4.6.1)$$

上式的物理意义为射电望远镜天线观测到单位天线温度时所对应源的流量密度，则最小可测天线温度 $T_{A,\min}$ 对应的射电望远镜最小可测流量密度为

$$F_{A,\min} = M \times Q \frac{2kT_{\text{sys}}}{\eta_A A_g \sqrt{B\tau}} \quad (4.6.2)$$

其中 k 为玻尔兹曼常数， η_A 和 A_g 是上一章定义的天线孔径效率和几何面积。

设用一架功率方向图为 $P(\theta, \phi)$ 的天线，观测亮温度分布为 $T_B(\theta, \phi)$ 的射电展源，当天线指向 (θ_i, ϕ_i) 时，天线接收射电辐射获得的天线温度为（参看 3.81 式）

$$T_A(\theta_i, \phi_j) = \frac{A_{\text{eff},0}}{\lambda^2} \iint_{\Omega_B} T_B(\theta, \phi) P(\theta - \theta_i, \phi - \phi_j) d\Omega$$

其中 Ω_B 天线束立体角。考虑一种极端的情况 $\Omega_B \ll \Omega_s$ ，即源的立体角远大于天线束立体角，在天线束立体角内，可以假定 $T_B(\theta, \phi)$ 变化很小，则从上式可改写为

$$T_A(\theta_i, \phi_j) = \frac{A_{\text{eff},0} T_B(\theta_i, \phi_j)}{\lambda^2} \iint_{\Omega_B} P(\theta - \theta_i, \phi - \phi_j) d\Omega \quad (4.6.3)$$

利用第二章里引进的波束效率 η_B 的定义（参看方程 3.6），结合方程 3.22，有

$$\eta_B = \frac{\Omega_B}{\Omega_A} = \frac{A_{eff,0}}{\lambda^2} \iint_{\Omega_B} P(\theta - \theta_i, \phi - \phi_j) d\Omega \quad (4.6.4)$$

如果只考虑天线波束影响，最小可测天线温度与亮温度的关系为

$$T_{B,\min} = \frac{T_{A,\min}}{\eta_B} = MQ \frac{T_{sys}}{\eta_B \sqrt{B\tau}} \quad (4.6.5)$$

而最小可探测的流量密度为

$$F_{v,\min} = \frac{2k}{\lambda^2} T_{B,\min} \Omega_B = MQ \frac{2k}{\lambda^2} \frac{T_{sys}}{\eta_B \sqrt{B\tau}} \Omega_B \quad (4.6.6)$$

利用方程 4.6.4，最后可以得到观测展源 $\Omega_s \gg \Omega_B$ 时的最小可探测流量密度

$$F_{v,\min} = M \times Q \frac{2kT_{sys}}{\eta_A A_g \sqrt{B\tau}} \quad (4.6.7)$$

我们发现上式与方程 4.5.2 完全相同。

上面我们来考虑了两种极端的情况，下面考虑源的立体角略小于天线束立体角 $\Omega_s < \Omega_B$ ，但又不能近似为点源的情况，这时不能假定在天线束立体角内 $T_B(\theta, \phi)$ 变化很小，没有方程 4.6.2 的近似关系。射电天线接收到的功率为（参看方程 3.71）

$$kT_A(\theta_i, \phi_j) \Delta\nu = \frac{1}{2} A_{eff,0} \Delta\nu \iint_{\Omega_s} B_v(\theta, \phi) P(\theta - \theta_i, \phi - \phi_j) d\Omega$$

上式可以改写为

$$T_A(\theta_i, \phi_j) = \frac{k_1}{2k} A_{eff,0} F_v \quad (4.6.8)$$

其中 k_1 是上一章定义的方向图改正因子（参看方程 3.73）， F_v 是源的观测流量密度

$$k_1 = \iint_{\Omega_s} B_v(\theta, \phi) P(\theta - \theta_i, \phi - \phi_j) d\Omega / \iint_{\Omega_s} B_v(\theta, \phi) d\Omega$$

$$F_v = \iint_{\Omega_s} B_v(\theta, \phi) d\Omega$$

则在源的立体角略小于天线束立体角的情况下，射电望远镜的灵敏度为

$$F_{v,\min} = M \times Q \frac{2kT_{sys}}{k_1 \eta_A A_g \sqrt{B\tau}} \quad (4.6.9)$$

上面我们获得了射电望远镜观测三种不同类型源情况下的灵敏度。我们在用一架望远镜时，在不同的波段可能用不同的带宽 B 和积分时间 τ ，但天线的几何面积 A_g 、效率 η_A 和 T_{sys} 反映这架望远

镜的性能和站址的环境，定义射电望远镜系统的等效流量密度（System Equivalent Flux Density, 简称 SEFD）为

$$SEFD = \frac{2kT_{sys}}{\eta_A A_g} \quad (4.6.10)$$

这是一个表述射电望远镜性能很重要的量，每个射电望远镜都给出这个值。于是在天线几何面积和天线效率一定的情况下，为了提高射电望远镜的灵敏度，应该降低射电望远镜接收系统的噪声温度 T_{sys} 。由于接收机的噪声温约占系统噪声温度的 50%至 70%之间，即提高射电望远镜灵敏度的任务就落在做好接收机的上面。另外在观测时，我们用增加带宽和加长积分时间的方法来提高灵敏度。射电辐射接收机平方律检波前的等效噪声带宽，主要决定于中频放大器的带宽。增加带宽，会提高接收机的灵敏度，但却降低了接收机的频率分辨率。积分时间 τ 的增加，会抑制噪声起伏，但对信号的快速变化也有平滑作用。因此，决定一架射电辐射接收机后端的频率分辨率和时间分辨，应按科学目标提出折衷的要求。